المتتاليات العددية

1) تعريف

كل دالة من المجموعة $\mathbb{N}$ نحو المجموعة $\mathbb{R}$ تسمى متتالية عددية (عناصر مرقمة).

مثال:

$U: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \quad Tq \;\; U(n) = 5n + 1$.

$V: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \quad Tq \;\; V(n) = n^2 + 3n - 1$.

$W: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \quad Tq \;\; W(n) = \frac{n+5}{2n+1}$.

$t: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \quad Tq \;\; t(n) = e^{2n+3}$.

$S: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \quad Tq \;\; S(n+1) = Ln(S(n) + 1) \;\; et \;\; S(0) = 1$.

$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \quad Tq \;\; f(n+2) = f(n+1) + f(n) \;\; et \;\; f(0) = 0, \; f(1) = 1$.

ملاحظة

المتتاليات U, V, W, t معرفة بعبارة الحد العام.

المتتاليتان S, f معرفة بطريقة تراجعية.

المتتاليتان U, t يمكن تعريفهما بطريقة تراجعية: $\begin{cases} U(n+1) = U(n) + 5 \quad avec \;\; U(0) = 1 \\ t(n+1) = t(n) \cdot e^2 \quad avec \;\; t(0) = e^3 \end{cases}$

2) تغيرات متتالية

نقول عن متتالية $(U_n)_{n \geq k}$ أنها متزايدة إدا تحقق $U_{n+1} \geq U_n$ من أجل كل $n \geq k$.

نقول عن متتالية $(U_n)_{n \geq k}$ أنها متناقصة إدا تحقق $U_{n+1} \leq U_n$ من أجل كل $n \geq k$.

نقول عن متتالية $(U_n)_{n \geq k}$ أنها غير رتيبة إدا كانت غير متزايدة و غير متناقصة.

مثال 1.

المتتالية $(l_n)_{n \geq 0}$ حيث $l_n = (2n-3)^2$ غير رتيبة لأن $\begin{cases} l_0 > l_1 \\ l_4 < l_5 \end{cases}$

المتتالية $(M_n)_{n \geq 0}$ حيث $M_n = \frac{1}{n}$ متناقصة لأن $M_{n+1} \leq M_n$

المتتالية $(R_n)_{n \geq 0}$ حيث $R_n = (-2)^n$ غي ;ر رتيبة لأن $\begin{cases} R_0 > R_1 \\ R_1 < R_2 \end{cases}$

مثال 2.

لنأخذ بعين الاعتبار الأمثلة المذكورة في بداية الدرس.

1) بما أن $U_{n+1} - U_n = 5 > 0$ فإن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماما.

كل متتالية حسابية أساسها موجب متزايدة و كل متتالية حسابية أساسها سالب متناقصة

2) بما أن $V_{n+1} - V_n = 2n + 4 > 0$ فإن المتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماما.

3) بما أن $W_{n+1} - W_n = \frac{-9}{(2n+3)(2n+1)} < 0$ فإن المتتالية $(W_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماما.

4) بما أن $t_{n+1} - t_n = e^{2n+3}(e^2 - 1) > 0$ فإن المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماما.

كل متتالية هندسية أساسها أكبر من الواحد متزايدة و كل متتالية هندسية أساسها محصور بين الصفر و الواحد متناقصة. أما المتتالية الهندسية ذات الأساس السالب فهي غير رتيبة.

5) بعد دراسة تغيرات الدالة $g(x) = Ln(x + 1) - x$ نجد أن $g(x) \leq 0$

إذن $S_{n+1} - S_n = g(S_n) \leq 0$ و بالتالي المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$ متناقصة.

6) بما أن (بالتراجع) $f_{n+1} - f_n = f_{n-1} > 0$ فإن المتتالية $(f_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماما.

3) طبيعة متتالية.

نقول عن متتالية $(U_n)_{n\geq k}$ أنها متقاربة إدا كان $\lim_{n\to+\infty} U_n = \delta \in \mathbb{R}$ و يقال عنها متباعدة في الحالات الأخرى

مثال

بأخذ بعين الاعتبار الأمثلة المذكورة في بداية الدرس لدينا.

- $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} 5n + 1 = +\infty$ إذن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متباعدة.
- $\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty} n^2 + 3n - 1 = +\infty$ إذن المتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$ متباعدة.
- $\lim_{n\to+\infty} W_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+5}{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{5}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$ إذن المتتالية $(W_n)_{n\geq 0}$ متقاربة.
- $\lim_{n\to+\infty} t_n = \lim_{n\to+\infty} e^{2n+3} = +\infty$ إذن المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ متباعدة.

ملاحظة

نهاية متتالية تعرف بطريقة هندسية وباستعمال هدا التعريف نبين الخواص المذكورة بعد المثال التالي.

مثال.

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^3+2n-3}-7n$ $\quad$ $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}-n$ $\quad$ $\lim_{n\to+\infty} n^2-5n+3$

$\lim_{n\to+\infty} e^{n+1}-n^3$ $\quad$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n-7^n}{3^n+7^n}$ $\quad$ $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+6n+2}-n$

خاصية 1

إدا كانت $(U_n)_{n\geq0}$ متتالية محدودة و $\begin{cases}\lim_{n\to+\infty} V_n = 0\\ \lim_{n\to+\infty} d_n = \infty\end{cases}$ فإن $\begin{cases}\lim_{n\to+\infty} U_n \cdot V_n = 0\\ \lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{d_n} = 0\end{cases}$

خاصية 2

- إدا كانت $(U_n)_{n\geq0}$ متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى من أجل الحدود ذات المراتب العليا فإنها متقاربة.
- إدا كانت $(U_n)_{n\geq0}$ متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل من أجل الحدود ذات المراتب العليا فإنها متقاربة.
- إدا كانت $(U_n)_{n\geq0}$ متتالية متناقصة و كانت $(V_n)_{n\geq0}$ متتالية متزايدة حيث $U_n \geq V_n$ من أجل الحدود ذات المراتب العليا فإن المتتاليتين $(U_n)_{n\geq0}$ ؛ $(V_n)_{n\geq0}$ متقاربتين؛ و تكون لهما نفس النهاية إذا كانت $\lim_{n\to+\infty}(U_n - V_n) = 0$.

4) <u>**دراسة المتتاليات التراجعية من الشكل**</u> $U_{n+1} = f(U_n)$

لتكن $(U_n)_{n\geq0}$ متتالية تراجعية تحقق $U_{n+1} = f(.U_n)$ حيث f دالة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$

إذا كانت الدالة f متزايدة على مجال يحوي عناصر المتتالية $(U_n)_{n\geq0}$ فلدينا إحدى الحالتين

- المتتالية $(U_n)_{n\geq0}$ متزايدة إذا كان $U_1 \geq U_0$
- المتتالية $(U_n)_{n\geq0}$ متناقصة إذا كان $U_1 \leq U_0$

إذا كانت الدالة f متناقصة على مجال يحوي عناصر المتتالية $(U_n)_{n\geq0}$ فإن المتتاليتين $(U_{2n})_{n\geq0}$ ؛ $(U_{2n+1})_{n\geq0}$ تحققان $\begin{cases} U_{2(n+1)} = g(U_{2n})\\ U_{2(n+1)+1} = g(U_{2n+1})\end{cases}$ حيث $g = f^\circ f$ دالة متزايدة. فنرجع عندئذ إلى الحالة الأولى.

هذا فيما يخص دراسة رتابة متتالية أما لدراسة تقاربها فنحاول معرفة هل هي محدودة أم لا من أجل استعمال الخاصية 2

عموما يمكن دراسة طبيعة متتالية ما بمقارنتها بمتتالية أخرى.

ملاحظة

لتكن $(U_n)_{n\geq0}$ متتالية تراجعية تحقق $U_{n+1} = f(U_n)$

إذا كانت المتتالية $(U_n)_{n\geq0}$ متقاربة نحو نهاية β فإن $f(\beta) = \beta$.

مثال 1.

نقوم بحل امتحان السداسي الأول و امتحان الدورة الاستدراكية لسنة 2011 .

مثال 2.

$$U_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \Leftrightarrow \begin{cases} U_1 = 1 \\ U_n = U_{n-1} + \frac{1}{n^2} \end{cases}$$

$$V_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \begin{cases} U_1 = 1 \\ U_n = U_{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

$$W_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots\cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots\cdots (2n)} \Leftrightarrow W_n = \frac{\prod_{k=1}^{k=n}(2k-1)}{\prod_{k=1}^{k=n} 2k} \Leftrightarrow \begin{cases} U_1 = \frac{1}{2} \\ U_n = U_{n-1} \cdot \frac{2n-1}{2n} \end{cases}$$

ملاحظة

المتتاليات العددية من حيث نهايتها تنقسم إلى أربعة أقسام هناك من المتتاليات من تؤول إلى $+\infty$ و هناك من تؤول إلى $-\infty$ و هناك من تؤول إلى عدد و هناك من المتتاليات من ليس لها نهاية.

لدراسة متتالية معرفة بعبارة الحد العام $U(n) = f(n)$ يمكن الاستعانة بجدول تغيرات الدالة $f(x)$

لدراسة مجموع من الشكل $U(n) = \sum_{k=i}^{n} f(k)$ نستعين بالدالة الأصلية للدالة f